PART2 対数の性質

要点 ① 対数の性質

$a^0=1$，$a^1=a$ より，次のことが成り立つ。

$$\log_a 1=0,\quad \log_a a=1$$

また，指数法則と対数の定義から，対数の性質が導かれる。

$p=\log_a M$，$q=\log_a N$ …… ① とすると，$a^p=M$，$a^q=N$

指数法則により　$MN=a^p a^q=a^{p+q}$

これを対数の記号を使って表すと　$\log_a MN=p+q$ …… ②

①，②より　$\log_a MN=\log_a M+\log_a N$

指数法則により　$\dfrac{M}{N}=\dfrac{a^p}{a^q}=a^{p-q}$

これを対数の記号を使って表すと　$\log_a \dfrac{M}{N}=p-q$ …… ③

①，③より　$\log_a \dfrac{M}{N}=\log_a M-\log_a N$

指数法則により　$M^k=(a^p)^k=a^{pk}$

これを対数の記号を使って表すと　$\log_a M^k=kp$ …… ④

①，④より　$\log_a M^k=k\log_a M$

対数の性質

$a>0$，$a\neq 1$，$M>0$，$N>0$ のとき

1　$\log_a MN=\log_a M+\log_a N$

2　$\log_a \dfrac{M}{N}=\log_a M-\log_a N$

3　$\log_a M^k=k\log_a M$　（k は実数）

例　$\log_2 6+\log_2 12-2\log_2 3=\log_2 6+\log_2 12-\log_2 3$

$\qquad =\log_2 \qquad\quad =\log_2 8=\log_2 2^3=3$

[MEMO]

2 次の計算をせよ。

(1) $\log_8 2+\log_8 32$　　(2) $\log_5 6-\log_5 30$

(3) $3\log_2 \sqrt[3]{6}-\log_2 3$　　(4) $\log_3 \dfrac{\sqrt{6}}{3}+2\log_3 \sqrt{3}-\dfrac{1}{2}\log_3 6$

Point Pickup

対数の性質

$a>0$，$a\neq 1$，$M>0$，$N>0$，k が実数のとき

1 $\log_a MN=\log_a M+\log_a N$　　**1'** $\log_a M+\log_a N=\log_a MN$

2 $\log_a \dfrac{M}{N}=\log_a M-\log_a N$　　**2'** $\log_a M-\log_a N=\log_a \dfrac{M}{N}$

3 $\log_a M^k=k\log_a M$　　**3'** $k\log_a M=\log_a M^k$

対数の計算においては，「**1'**，**2'**，**3'** を用いて 1 つの対数にまとめていく」または，「**1**，**2**，**3** を用いて分けていく」のいずれかの手法をとる。

第 14 講 PART2 確認問題

次の計算をせよ。

1 $\log_6 4+\log_6 9=$ ア

2 $\log_2 3-\log_2 24=$ イウ

3 $2\log_3 \sqrt{15}-\log_3 5=$ エ

4 $\log_2 \frac{\sqrt{5}}{2}+6\log_2 \sqrt{2}-\frac{1}{2}\log_2 5=$ オ

PART2 対数の性質

2 次の計算をせよ。

(1) $\log_8 2+\log_8 32$　　(2) $\log_5 6-\log_5 30$

(3) $3\log_2 \sqrt[3]{6}-\log_2 3$　　(4) $\log_3 \dfrac{\sqrt{6}}{3}+2\log_3 \sqrt{3}-\dfrac{1}{2}\log_3 6$

[解答]

(1) $\log_8 2+\log_8 32=\log_8 (2\times 32)=\log_8 64=\log_8 8^2=2$

(2) $\log_5 6-\log_5 30=\log_5 \dfrac{6}{30}=\log_5 \dfrac{1}{5}=\log_5 5^{-1}=-1$

(3) $$3\log_2 \sqrt[3]{6}-\log_2 3=\log_2 \left(6^{\frac{1}{3}}\right)^3-\log_2 3=\log_2 6^{\frac{1}{3}\times 3}-\log_2 3$$
$$=\log_2 6-\log_2 3=\log_2 \frac{6}{3}=\log_2 2=1$$

(4) $$\log_3 \frac{\sqrt{6}}{3}+2\log_3 \sqrt{3}-\frac{1}{2}\log_3 6=\log_3 \frac{\sqrt{6}}{3}+\log_3 \left(3^{\frac{1}{2}}\right)^2-\log_3 6^{\frac{1}{2}}$$
$$=\log_3 \frac{\sqrt{6}}{3}+\log_3 3-\log_3 \sqrt{6}$$
$$=\log_3 \frac{\sqrt{6}\times 3}{3\times\sqrt{6}}=\log_3 1=0$$

第 14 講　PART2 確認問題 解答

1　**[正解]** ア：2

[解説]

$$\log_6 4+\log_6 9=\log_6 (4\times 9) \quad \text{[A]}$$
$$=\log_6 36$$
$$=\log_6 6^2 \quad \text{[B]}$$
$$=\mathbf{2}$$

[A]　対数の性質
$\log_a MN=\log_a M+\log_a N$
$(a>0,\ a\neq 1,\ M>0,\ N>0)$

[B]　$\log_a a^p=p\ (a>0,\ a\neq 1)$

2　**[正解]** イウ：-3

[解説]

$$\log_2 3-\log_2 24=\log_2 \frac{3}{24} \quad \text{[C]}$$
$$=\log_2 \frac{1}{8}$$
$$=\log_2 2^{-3} \quad \text{[D]}$$
$$=\mathbf{-3}$$

[C]　対数の性質
$\log_a \dfrac{M}{N}=\log_a M-\log_a N$
$(a>0,\ a\neq 1,\ M>0,\ N>0)$

[D]　$\log_a a^p=p\ (a>0,\ a\neq 1)$

3　**[正解]** エ：1

[解説]

$$2\log_3 \sqrt{15}-\log_3 5=\log_3 \left(15^{\frac{1}{2}}\right)^2-\log_3 5 \quad \text{[E]}$$
$$=\log_3 15^{\frac{1}{2}\times 2}-\log_3 5$$
$$=\log_3 15-\log_3 5$$
$$=\log_3 \frac{15}{5} \quad \text{[E]}$$
$$=\log_3 3$$
$$=\mathbf{1}$$

[E]　対数の性質
$\log_a M^k=k\log_a M$
$\log_a \dfrac{M}{N}=\log_a M-\log_a N$
$(a>0,\ a\neq 1,\ M>0,\ N>0,\ k$ は実数)

4 **[正解]** オ：2

[解説]

$$\log_2\frac{\sqrt{5}}{2}+6\log_2\sqrt{2}-\frac{1}{2}\log_2 5$$

$$=\log_2\frac{\sqrt{5}}{2}+\log_2\left(2^{\frac{1}{2}}\right)^6-\log_2 5^{\frac{1}{2}}$$ [F]

$$=\log_2\frac{\sqrt{5}}{2}+\log_2 8-\log_2\sqrt{5}$$

$$=\log_2\frac{\sqrt{5}\times 8}{2\times\sqrt{5}}$$ [F]

$$=\log_2 4$$

$$=\log_2 2^2$$

$$=\mathbf{2}$$

[F]　対数の性質

$\log_a M^k=k\log_a M$

$\log_a MN=\log_a M+\log_a N$

$\log_a \dfrac{M}{N}=\log_a M-\log_a N$

（$a>0$，$a\neq 1$，$M>0$，$N>0$，k は実数）